

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОГО ЭЛЕМЕНТА ПРОТОЧНОГО КАНАЛА¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Целью данной работы является исследование динамической устойчивости упругого элемента стенки канала при протекании в нем дозвукового потока газа или жидкости.

Материалы и методы. Воздействие газа или жидкости (в модели идеальной сжимаемой среды) на конструкции определяется из асимптотических линейных уравнений аэрогидромеханики. Для описания динамики упругого элемента, представляющего собой упругую пластину, используется линейная теория твердого деформируемого тела. При указанных предположениях построена математическая модель канала, содержащего на одной из стенок упругий элемент, при протекании в канале дозвукового потока газа или жидкости. Модель описывается связанной системой дифференциальных уравнений в частных производных, содержащей как уравнение движения газожидкостной среды, так и уравнение динамики деформируемого элемента, для двух неизвестных функций – потенциала скорости газа и деформаций упругого элемента. Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Исследование устойчивости проведено на основе построения «смешанных» функционалов типа Ляпунова для полученной связанной системы уравнений.

Результаты. Построена математическая модель канала, содержащего на одной из стенок упругий элемент, при протекании в канале дозвукового потока газа или жидкости. На основе построенного функционала исследована динамическая устойчивость упругого элемента. Получены достаточные условия устойчивости, налагающие ограничения на скорость однородного потока газа, сжимающего (растягивающего) элемент усилия, изгибную жесткость элемента и другие параметры механической системы. Для конкретного примера механической системы построена область устойчивости на плоскости двух параметров «сжимающее усилие – скорость потока».

Выводы. Полученные достаточные условия устойчивости, налагающие ограничения на параметры механической системы, обеспечивают устойчивость колебаний упругого элемента. Для параметров, не удовлетворяющих этим условиям, нельзя сделать определенных выводов об устойчивости колебаний упругого элемента.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, устойчивость, упругая пластина, деформация, дозвуковой поток.

A. V. Ankilov, P. A. Vel'misov, Yu. A. Tamarova

DYNAMICAL STABILITY OF AN ELASTIC ELEMENT OF A FLOW CHANNEL

Abstract.

Background. The purpose of this work is to research the dynamic stability of an elastic element of a wall of a flow channel with a subsonic stream of gas or liquid in it.

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/232 Минобрнауки России.

Materials and methods. Gas or liquid influence (in the model of ideal compressed environment) on the constructions is defined from the asymptotic linear equations of aerohydrodynamics. For the description of dynamics of the elastic element representing an elastic plate, the linear theory of a solid deformable body was used. According to the specified assumptions the mathematical model of a channel containing an elastic element on one of walls, with a subsonic stream of gas or liquid, was constructed. The model was described by the related system of differential equations with partial derivatives, containing both the equation of movement of the gas-liquid environment and the equation of dynamics of a deformable element, for two unknown functions – the potential of gas velocity and deformations of an elastic element. Determination of stability of an elastic body corresponds to the concept of stability of dynamic systems across Lyapunov. Research of stability was conducted on the basis of creation of the "mixed" functionals of Lyapunov type for the received related system of equations.

Results. The mathematical model of a channel containing an elastic element on one of walls, with a flow of a subsonic stream of gas or liquid, was constructed. On the basis of the constructed functionals the dynamic stability of an elastic element was investigated. The sufficient stability conditions were received. The conditions impose restrictions on velocity of a uniform stream of gas, squeezing (stretching) effort of an element, flexural rigidity of an element and other parameters of the mechanical system. For the concrete example of mechanical systems the stability area on the plane of two parameters "squeezing effort-stream velocity" was constructed.

Conclusions. The received sufficient stability conditions, imposing restrictions on parameters of the mechanical system, provide stability of fluctuations of an elastic element, namely: small deformations of an elastic element in the initial timepoint (i.e. small initial deviations from the position of balance) correspond to small deformations at any timepoint. For the parameters which aren't meeting these conditions, it is impossible to make certain conclusions about stability of fluctuations of an elastic element.

Key words: aerohydroelasticity, stability, elastic plate, deformation, subsonic flow.

Введение

При проектировании конструкций, обтекаемых потоком газа или жидкости, важное значение имеет исследование устойчивости деформируемых элементов. Воздействие потока может приводить к отрицательным эффектам, являющимся причиной нарушения необходимых функциональных свойств элементов вплоть до их разрушения.

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике и используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий и подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки (см., например, [1]).

Таким образом, при проектировании конструкций и устройств, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой, необходимо решать задачи, которые связаны с исследованием устойчивости упругих элементов, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации.

В работе исследуется динамическая устойчивость упругого элемента стенки канала при протекании в нем дозвукового потока газа или жидкости

(в модели идеальной сжимаемой среды). Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Исследование устойчивости проводится в линейной постановке, соответствующей малым возмущениям однородного дозвукового потока и малым деформациям (прогибам) упругого элемента стенки канала. На основе построения функционала для связанной системы дифференциальных уравнений в частных производных для двух неизвестных функций – прогиба упругого элемента стенки канала и потенциала скорости возмущенного потока, получены условия устойчивости решений этой системы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим плоское течение в прямолинейном канале $J = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$. Скорость невозмущенного однородного потока равна V и направлена вдоль оси Ox . Упругой является часть стенки $y = y_0$ при $x \in [b, c]$ (рис. 1).

Введем обозначения: $w(x, t)$ – функция деформации упругого элемента стенки канала; $\varphi(x, y, t)$ – потенциал скорости возмущенного потока.

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad (x, y) \in J, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, b] \cup [c, x_0), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$\varphi(0, y, t) = 0, \quad \varphi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$L(w) = -\rho(\varphi_t(x, y_0, t) + V\varphi_x(x, y_0, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

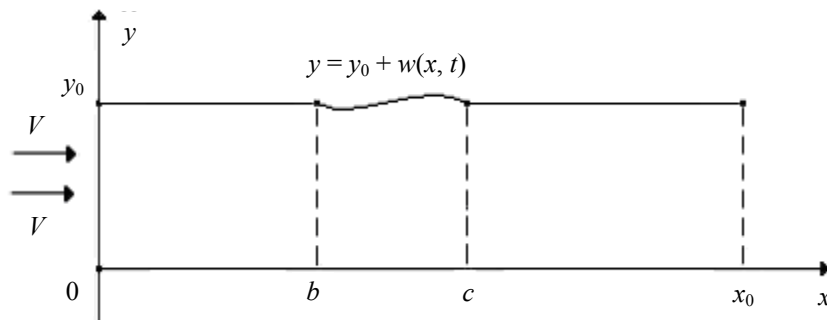


Рис. 1. Канал, стенка которого содержит деформируемый элемент

Дифференциальный оператор $L(w)$ задается выражением

$$L(w) \equiv Dw'''(x, t) + \beta_2 \dot{w}'''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + Nw''(x, t) + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_0 w(x, t). \quad (7)$$

Индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t ; штрих и точка – частные производные по x и t соответственно; ρ – плотность жидкости в однородном невозмущенном потоке; D, M – изгибная жесткость и погонная масса пластины; N – сжимающая ($N > 0$) или растягивающая ($N < 0$) пластину сила; β_1, β_2 – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования; β_0 – коэффициент жесткости основания; a – скорость звука в невозмущенном потоке жидкости ($a > V$).

Предположим, что концы упругого элемента закреплены либо жестко, либо шарнирно, тогда при $x = b$ и $x = c$ выполняется одно из условий:

$$1) w = w' = 0; \quad 2) w = w'' = 0. \quad (8)$$

Таким образом, получили связанную задачу (1)–(8) для двух неизвестных функций – прогиба упругого элемента стенки канала $w(x, t)$ и потенциала скорости жидкости (газа) $\varphi(x, y, t)$.

2. Исследование устойчивости

Исследуем устойчивость нулевого решения $\varphi(x, y, t) \equiv 0, w(x, t) \equiv 0$ системы (1)–(8) по Ляпунову. Введем функционал

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iint_J \left(\varphi_t^2 + (a^2 - V^2) \varphi_x^2 + a^2 \varphi_y^2 \right) dx dy - 2a^2 V \int_b^c \varphi(x, y_0, t) w'(x, t) dx + \\ & + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c \left(M \dot{w}^2 + D w''^2 - N w'^2 + \beta_0 w^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Найдем производную от Φ по t

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & 2 \iint_J \left(\varphi_t \varphi_{tt} + (a^2 - V^2) \varphi_x \varphi_{xt} + a^2 \varphi_y \varphi_{yt} \right) dx dy - \\ & - 2a^2 V \int_b^c \left(\varphi_t(x, y_0, t) w'(x, t) + \varphi(x, y_0, t) \dot{w}'(x, t) \right) dx + \\ & + \frac{2a^2}{\rho} \int_b^c \left(M \dot{w} \ddot{w} + D w'' \dot{w}'' - N w' \dot{w}' + \beta_0 w \dot{w} \right) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Для функций $\varphi(x, y, t)$ и $w(x, t)$, удовлетворяющих уравнениям (1) и (6), (7), равенство (10) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & 2 \iint_J \left(\varphi_t \left(-2V \varphi_{xt} - V^2 \varphi_{xx} + a^2 (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) \right) + (a^2 - V^2) \varphi_x \varphi_{xt} + \right. \\ & \left. + a^2 \varphi_y \varphi_{yt} \right) dx dy - 2a^2 V \int_b^c \left(\varphi_t(x, y_0, t) w'(x, t) + \varphi(x, y_0, t) \dot{w}'(x, t) \right) dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2a^2}{\rho} \int_b^c (\dot{w} \{ -\rho(\varphi_t(x, y_0, t) + V\varphi_x(x, y_0, t)) - Dw'''' - \beta_2 \dot{w}'''' - Nw'' - \\
 & - \beta_1 \dot{w} - \beta_0 w \} + Dw'' \dot{w}'' - Nw' \dot{w}' + \beta_0 w \dot{w}) dx.
 \end{aligned} \quad (11)$$

Произведем интегрирование с учетом условий (2)–(5), (8):

$$\begin{aligned}
 \iint_J \varphi_t \varphi_{xt} dx dy &= \int_0^{y_0} dy \int_0^{x_0} \varphi_t \varphi_{xt} dx = \frac{1}{2} \int_0^{y_0} \varphi_t^2 \Big|_{x=0}^{x_0} dy = 0, \\
 \iint_J \varphi_t \varphi_{xx} dx dy &= \int_0^{y_0} dy \int_0^{x_0} \varphi_t \varphi_{xx} dx = \\
 &= \int_0^{y_0} \left(\varphi_t \varphi_x \Big|_{x=0}^{x_0} - \int_0^{x_0} \varphi_{xt} \varphi_x dx \right) dy = - \iint_J \varphi_{xt} \varphi_x dx dy, \\
 \iint_J \varphi_t \varphi_{yy} dx dy &= \int_0^{x_0} dx \int_0^{y_0} \varphi_t \varphi_{yy} dy = \int_0^{x_0} \left(\varphi_t \varphi_y \Big|_{y=0}^{y_0} - \int_0^{y_0} \varphi_{yt} \varphi_y dy \right) dx = \\
 &= \int_0^{x_0} \varphi_t(x, y_0, t) \varphi_y(x, y_0, t) dx - \iint_J \varphi_{yt} \varphi_y dx dy = \int_b^c \varphi_t(x, y_0, t) (\dot{w}(x, t) + Vw'(x, t)) dx - \\
 &- \iint_J \varphi_{yt} \varphi_y dx dy, \quad \int_b^c \dot{w} w'''' dx = \int_b^c \dot{w}'' w'' dx, \quad \int_b^c \dot{w} \dot{w}'''' dx = \int_b^c \dot{w}''^2 dx, \quad \int_b^c \dot{w} w'' dx = - \int_b^c \dot{w}' w' dx.
 \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получим

$$\begin{aligned}
 \dot{\Phi}(t) &= 2a^2 \int_b^c \varphi_t(x, y_0, t) (\dot{w}(x, t) + Vw'(x, t)) dx - 2a^2 V \int_b^c (\varphi_t(x, y_0, t) w'(x, t) + \\
 &+ \varphi(x, y_0, t) \dot{w}'(x, t)) dx - 2a^2 \int_b^c \dot{w}(x, t) (\varphi_t(x, y_0, t) + V\varphi_x(x, y_0, t)) dx - \\
 &- \frac{2a^2}{\rho} \int_b^c (\beta_2 \dot{w}''^2 + \beta_1 \dot{w}^2) dx = -2a^2 V \int_b^c (\varphi(x, y_0, t) \dot{w}'(x, t) + \dot{w}(x, t) \varphi_x(x, y_0, t)) dx - \\
 &- \frac{2a^2}{\rho} \int_b^c (\beta_2 \dot{w}''^2 + \beta_1 \dot{w}^2) dx = -2a^2 V \varphi(x, y_0, t) \dot{w}(x, t) \Big|_{x=b}^c - \\
 &- \frac{2a^2}{\rho} \int_b^c (\beta_2 \dot{w}''^2 + \beta_1 \dot{w}^2) dx = - \frac{2a^2}{\rho} \int_b^c (\beta_2 \dot{w}''^2 + \beta_1 \dot{w}^2) dx.
 \end{aligned}$$

Пусть выполняются условия

$$\beta_2 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \quad (13)$$

тогда окончательно получим

$$\dot{\Phi}(t) \leq 0 \Rightarrow \Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (14)$$

Проведем оценки для функционала с учетом граничных условий (8).

Рассмотрим краевую задачу для уравнения $\psi''' = -\lambda\psi''$, $x \in (b, c)$ с краевыми условиями (8). Эта задача является самосопряженной и полностью определенной. Действительно, для любых функций U, Q , удовлетворяющих краевым условиям (8), получим

$$\begin{aligned} \int_b^c U Q''' dx &= U Q''|_b^c - \int_b^c U' Q'' dx = -U' Q''|_b^c + \int_b^c U'' Q'' dx = \\ &= U'' Q'|_b^c + \int_b^c U''' Q' dx = -U''' Q|_b^c + \int_b^c U''' Q dx = \int_b^c U''' Q dx, \\ \int_b^c U Q'' dx &= U Q'|_b^c - \int_b^c U' Q' dx = -U' Q'|_b^c + \int_b^c U'' Q' dx = \int_b^c U'' Q' dx, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \int_b^c U U''' dx &= U U''|_b^c - \int_b^c U' U'' dx = -U' U''|_b^c + \int_b^c U'' U'' dx = \int_b^c U''^2 dx > 0, \\ -\int_b^c U U'' dx &= -U U'|_b^c + \int_b^c U' U' dx = \int_b^c U'^2 dx > 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Для функции $w(x, t)$ запишем неравенство Рэлея [2]:

$$\int_b^c w(x, t) w'''(x, t) dx \geq -\lambda_1 \int_b^c w(x, t) w''(x, t) dx,$$

где λ_1 – наименьшее собственное значение рассматриваемой краевой задачи. Интегрируя по частям, представим это неравенство в виде

$$\int_b^c w''^2(x, t) dx \geq \lambda_1 \int_b^c w'^2(x, t) dx. \quad (17)$$

Аналогично рассмотрим краевую задачу для уравнения $\psi''' = \mu\psi$ $x \in (b, c)$ с краевыми условиями (8). Эта задача является самосопряженной и полностью определенной. Действительно, для любых функций U, Q , удовлетворяющих краевым условиям (8), получим соотношения (15), (16).

Для функции $w(x, t)$ запишем неравенство Рэлея:

$$\int_b^c w(x, t) w'''(x, t) dx \geq \mu_1 \int_b^c w(x, t) w(x, t) dx,$$

где μ_1 – наименьшее собственное значение рассматриваемой краевой задачи.

Интегрируя по частям, представим это неравенство в виде

$$\int_b^c w'^2(x, t) dx \geq \mu_1 \int_b^c w^2(x, t) dx. \quad (18)$$

Далее, воспользовавшись неравенством Коши – Буняковского, получим

$$\begin{aligned} \left(\int_b^x w'(x, t) dx \right)^2 &\leq \int_b^x 1^2 dx \int_b^x w'^2(x, t) dx \leq \int_b^c 1^2 dx \int_b^c w'^2(x, t) dx, \\ \left(w(x, t) \Big|_b^x \right)^2 &\leq (x|_b^c) \int_b^c w'^2(x, t) dx, \\ w^2(x, t) &\leq (c-b) \int_b^c w'^2(x, t) dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Оценим $\Phi(0)$ сверху, используя неравенства (17), (18) и очевидное неравенство $-2ab \leq a^2 + b^2$:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \iint_J \left(\varphi_{t0}^2 + (a^2 - V^2) \varphi_{x0}^2 + a^2 \varphi_{y0}^2 \right) dx dy - 2a^2 V \int_b^c \varphi(x, y_0, 0) w'(x, 0) dx + \\ &+ \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (M \dot{w}_0^2 + D w_0'^2 - N w_0'^2 + \beta_0 w_0^2) dx \leq \iint_J \left(\varphi_{t0}^2 + (a^2 - V^2) \varphi_{x0}^2 + \right. \\ &+ \left. a^2 \varphi_{y0}^2 \right) dx dy + a^2 \int_b^c \varphi^2(x, y_0, 0) dx + a^2 V^2 \int_b^c w'^2(x, 0) dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (M \dot{w}_0^2 + \\ &+ D w_0'^2 - N w_0'^2 + \beta_0 w_0^2) dx \leq \iint_J \left(\varphi_{t0}^2 + (a^2 - V^2) \varphi_{x0}^2 + a^2 \varphi_{y0}^2 \right) dx dy + \\ &+ a^2 \int_b^c \varphi^2(x, y_0, 0) dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (M \dot{w}_0^2 + D w_0'^2 + (|N| + \rho V^2) w_0'^2 + \beta_0 w_0^2) dx \leq \\ &\leq \iint_J \left(\varphi_{t0}^2 + (a^2 - V^2) \varphi_{x0}^2 + a^2 \varphi_{y0}^2 \right) dx dy + a^2 \int_b^c \varphi^2(x, y_0, 0) dx + \end{aligned}$$

$$+\frac{a^2}{\rho}\int_b^c\left(M\dot{w}_0^2+\left(D+\frac{|N|+\rho V^2}{\lambda_1}+\frac{\beta_0}{\mu_1}\right)w_0'^2\right)dx. \quad (20)$$

Здесь введены обозначения $\varphi_{t0} = \varphi_t(x, y, 0)$, $\varphi_{x0} = \varphi_x(x, y, 0)$, $\varphi_{y0} = \varphi_y(x, y, 0)$, $\dot{w}_0 = \dot{w}(x, 0)$, $w_0 = w(x, 0)$, $w'_0 = w'(x, 0)$, $w''_0 = w''(x, 0)$.

Оценим $\Phi(t)$ снизу:

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \iint_J \left(\varphi_t^2 + (a^2 - V^2) \varphi_x^2 + a^2 \varphi_y^2 \right) dx dy - \\ & - 2a^2 V \int_b^c \varphi(x, y_0, t) w'(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (\lambda_1 D - N) w'^2 dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\psi'' = -\eta \psi, \quad x \in (0, x_0), \quad (22)$$

с краевыми условиями

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(x_0) = 0. \quad (23)$$

Задача является самосопряженной и полностью определенной. Действительно, для любых функций U, Q , удовлетворяющих краевым условиям $U(0) = U(x_0) = Q(0) = Q(x_0) = 0$, получим

$$\begin{aligned} -\int_0^{x_0} U U'' dx &= -U U' \Big|_0^{x_0} + \int_0^{x_0} U'^2 dx = \int_0^{x_0} U'^2 dx > 0, \\ \int_0^{x_0} U Q'' dx &= U Q' \Big|_0^{x_0} - \int_0^{x_0} U' Q' dx = -U' Q \Big|_0^{x_0} + \int_0^{x_0} U'' Q dx = \int_0^{x_0} U'' Q dx. \end{aligned}$$

Используя неравенство Рэлея для функции $\varphi(x, y, t)$, получим

$$-\int_0^{x_0} \varphi \varphi_{xx} dx \geq \eta_1 \int_0^{x_0} \varphi \varphi dx, \quad (24)$$

где η_1 – наименьшее собственное значение рассматриваемой краевой задачи.

Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^{x_0} \varphi_x^2 dx \geq \eta_1 \int_0^{x_0} \varphi^2 dx. \quad (25)$$

Найдем η_1 . Общее решение уравнения (22) имеет вид

$$\psi = A \cos \sqrt{\eta} x + B \sin \sqrt{\eta} x.$$

Удовлетворяя граничным условиям (23), получим $\psi = B \sin \sqrt{\eta_k} x$, $\eta_k = \frac{\pi^2 k^2}{x_0^2}$. Таким образом, $\eta_1 = \frac{\pi^2}{x_0^2}$. Из (25) следует

$$\int_0^{x_0} \varphi_x^2 dx \geq \frac{\pi^2}{x_0^2} \int_0^{x_0} \varphi^2 dx \Rightarrow \iint_J \varphi_x^2 dx dy \geq \frac{\pi^2}{x_0^2} \iint_J \varphi^2 dx dy. \quad (26)$$

Применяя неравенство Коши – Буняковского, получим неравенство

$$\left(\int_y^{y_0} \varphi_y dy \right)^2 \leq \int_y^{y_0} 1^2 dy \int_y^{y_0} \varphi_y^2 dy.$$

Следовательно,

$$(\varphi(x, y_0, t) - \varphi(x, y, t))^2 \leq (y_0 - y) \int_y^{y_0} \varphi_y^2 dy \leq (y_0 - y) \int_0^{y_0} \varphi_y^2 dy.$$

Интегрируя от 0 до y_0 по переменной y , получим

$$\int_0^{y_0} (\varphi(x, y_0, t) - \varphi(x, y, t))^2 dy \leq \frac{y_0^2}{2} \int_0^{y_0} \varphi_y^2 dy.$$

Интегрируя от 0 до x_0 по переменной x , окончательно находим

$$\iint_J \varphi_y^2 dx dy \geq \frac{2}{y_0^2} \iint_J (\varphi(x, y_0, t) - \varphi(x, y, t))^2 dx dy. \quad (27)$$

Применяя (26), (27) для (21), получим неравенство

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \iint_J \left(\varphi_t^2 + (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} \varphi^2 + \frac{2a^2}{y_0^2} (\varphi(x, y_0, t) - \varphi(x, y, t))^2 \right) dx dy - \\ & - 2a^2 V \int_b^c \varphi(x, y_0, t) w'(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (\lambda_1 D - N) w'^2 dx. \end{aligned} \quad (28)$$

Введем обозначение

$$f(x, t) = \begin{cases} 0, & x \in (0, b], \\ w'(x, t), & x \in (b, c), \\ 0, & x \in [c, x_0), \end{cases}$$

тогда из (28) получим неравенство

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \iint_J \left[\varphi_t^2(x, y, t) + (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} \varphi^2(x, y, t) + \frac{2a^2}{y_0^2} \left(\varphi^2(x, y_0, t) - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2\varphi(x, y_0, t)\varphi(x, y, t) + \varphi^2(x, y, t) \right) \right] dx dy - 2a^2 V \int_0^{x_0} \varphi(x, y_0, t) f(x, t) dx + \\ & + \frac{a^2}{\rho} \int_0^{x_0} (\lambda_1 D - N) f^2(x, t) dx = \iint_J \left[\varphi_t^2(x, y, t) + \left((a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2a^2}{y_0^2} \right) \varphi^2(x, y, t) - \frac{4a^2}{y_0^2} \varphi(x, y_0, t)\varphi(x, y, t) + \frac{2a^2}{y_0^2} \varphi^2(x, y_0, t) - \right. \\ & \left. - \frac{2a^2 V}{y_0} \varphi(x, y_0, t) f(x, t) + \frac{a^2 (\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} f^2(x, t) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (29)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2}, \quad d_{22} = d_{12} = \frac{2a^2}{y_0^2}, \\ d_{23} &= \frac{V}{y_0^2}, \quad d_{33} = \frac{a^2 (\lambda_1 D - N)}{\rho y_0}. \end{aligned} \quad (30)$$

Рассмотрим квадратичную форму относительно $\varphi(x, y, t)$, $\varphi(x, y_0, t)$, $f(x, t)$ в (29). Соответствующая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} d_{11} & -d_{12} & 0 \\ -d_{12} & d_{22} & -d_{23} \\ 0 & -d_{23} & d_{33} \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра запишем условия положительно определенной квадратичной формы

$$\Delta_1 = d_{11} > 0,$$

$$\Delta_2 = d_{11}d_{22} - d_{12}^2 = \frac{2(a^2 - V^2)\pi^2 a^2}{x_0^2 y_0^2} > 0, \quad (31)$$

$$\Delta_3 = d_{33}\Delta_2 - d_{23}^2 d_{11} > 0. \quad (32)$$

Условия (31) выполняются. Рассмотрим неравенство (32):

$$\frac{a^2 (\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} \frac{2(a^2 - V^2)\pi^2 a^2}{x_0^2 y_0^2} - \frac{a^4 V^2}{y_0^2} \left(\frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right) > 0. \quad (33)$$

Необходимое условие выполнения неравенства (33):

$$(\lambda_1 D - N) > 0. \quad (34)$$

Преобразуем неравенство (33):

$$V^4 - \left(a^2 + \frac{2a^2 x_0^2}{y_0^2 \pi^2} + \frac{2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} \right) V^2 + \frac{2(\lambda_1 D - N) a^2}{\rho y_0} > 0. \quad (35)$$

Дискриминант биквадратного выражения имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left(a^2 + \frac{2a^2 x_0^2}{y_0^2 \pi^2} + \frac{2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} \right)^2 - \frac{8(\lambda_1 D - N) a^2}{\rho y_0} = \\ &= \left(a^2 + \frac{2a^2 x_0^2}{y_0^2 \pi^2} - \frac{2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} \right)^2 + \frac{16a^2 x_0^2 (\lambda_1 D - N)}{\rho \pi^2 y_0^3} > 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Запишем два решения неравенства (35):

$$\text{I. } V^2 > \frac{1}{2} \left(a^2 + \frac{2a^2 x_0^2}{y_0^2 \pi^2} + \frac{2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\mathcal{D}}. \quad (37)$$

Согласно (36), (34)

$$\sqrt{\mathcal{D}} > \left| a^2 + \frac{2a^2 x_0^2}{y_0^2 \pi^2} - \frac{2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} \right|.$$

Рассмотрим два случая:

$$\text{а) } a^2 + \frac{2a^2 x_0^2}{y_0^2 \pi^2} - \frac{2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} > 0, \text{ тогда}$$

$$V^2 > \frac{1}{2} \left(a^2 + \frac{2a^2 x_0^2}{y_0^2 \pi^2} + \frac{2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} + a^2 + \frac{2a^2 x_0^2}{y_0^2 \pi^2} - \frac{2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} \right) > a^2,$$

так как $V < a$, то неравенство (37) решений не имеет;

$$\text{б) } a^2 + \frac{2a^2 x_0^2}{y_0^2 \pi^2} - \frac{2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} < 0, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} V^2 &> \frac{1}{2} \left(a^2 + \frac{2a^2 x_0^2}{y_0^2 \pi^2} + \frac{2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} - a^2 - \frac{2a^2 x_0^2}{y_0^2 \pi^2} + \frac{2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} \right) = \\ &= \frac{2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} > a^2 + \frac{2a^2 x_0^2}{y_0^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

Так как $V < a$, то неравенство (37) также решений не имеет.

$$\text{II. } V^2 < \frac{1}{2} \left(a^2 + \frac{2a^2 x_0^2}{y_0^2 \pi^2} + \frac{2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\mathcal{D}}, \quad (38)$$

где $\mathcal{D}$ определено равенством (36).

Используя метод Лагранжа, с учетом неравенства (33) оценим квадратичную форму в (29):

$$\begin{aligned} F(\varphi(x, y, t), \varphi(x, y_0, t), f(x, t)) &= d_{11}\varphi^2(x, y, t) - 2d_{12}\varphi(x, y, t)\varphi(x, y_0, t) + \\ &+ d_{22}\varphi^2(x, y_0, t) - 2d_{23}\varphi(x, y_0, t)f(x, t) + d_{33}f^2(x, t) = \left(\sqrt{d_{11}}\varphi(x, y, t) - \right. \\ &\left. - \frac{d_{12}}{\sqrt{d_{11}}}\varphi(x, y_0, t) \right)^2 + \left(d_{22} - \frac{d_{12}^2}{d_{11}} \right) \varphi^2(x, y_0, t) - 2d_{23}\varphi(x, y_0, t)f(x, t) + \\ &+ d_{33}f^2(x, t) \geq \left(\sqrt{\frac{d_{11}d_{22} - d_{12}^2}{d_{11}}}\varphi(x, y_0, t) - \frac{d_{23}\sqrt{d_{11}}}{\sqrt{d_{11}d_{22} - d_{12}^2}}f(x, t) \right)^2 + \\ &+ \left(d_{33} - \frac{d_{23}^2 d_{11}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \right) f^2(x, t) \geq \\ &\geq \left(\frac{d_{11}d_{22}d_{33} - d_{23}^2 d_{11} - d_{12}^2 d_{33}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \right) f^2(x, t) = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} f^2(x, t). \end{aligned}$$

Из (29) с учетом (19) получим

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\geq \iint_J \frac{\Delta_3}{\Delta_2} f^2(x, t) dx dy = \int_0^{x_0} \frac{\Delta_3 y_0}{\Delta_2} f^2(x, t) dx = \\ &= \int_b^c \frac{\Delta_3 y_0}{\Delta_2} w'^2(x, t) dx \geq \frac{\Delta_3 y_0}{\Delta_2 (c-b)} w^2(x, t). \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, учитывая (14), (20), (39), получим неравенство

$$\begin{aligned} w^2(x, t) &\leq \frac{\Delta_2 (c-b)}{\Delta_3 y_0} \iint_J (\varphi_{t0}^2 + (a^2 - V^2)\varphi_{x0}^2 + a^2 \varphi_{y0}^2) dx dy + a^2 \int_b^c \varphi^2(x, y_0, 0) dx + \\ &+ \frac{a^2}{\rho} \int_b^c \left(M \dot{w}_0^2 + \left(D + \frac{|N| + \rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1} \right) w_0'^2 \right) dx, \end{aligned}$$

из которого следует теорема

Теорема 1. Пусть выполняются условия (13), (34), (38). Тогда решение $w(x, t)$ задачи (1)–(8) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных $\varphi_{t0}, \varphi_{x0}, \varphi_{y0}, \varphi(x, y_0, 0), \dot{w}_0, w_0''$.

Аналогично оценивая квадратичную форму в (29), получим

$$\begin{aligned} F(\varphi(x, y, t), \varphi(x, y_0, t), f(x, t)) &= \left(\sqrt{d_{33}} f(x, t) - \frac{d_{23}}{\sqrt{d_{33}}} \varphi(x, y_0, t) \right)^2 + \\ &+ \left(d_{22} - \frac{d_{23}^2}{d_{33}} \right) \varphi^2(x, y_0, t) - 2d_{12} \varphi(x, y_0, t) \varphi(x, y, t) + d_{11} \varphi^2(x, y, t) \geq \\ &\geq \left(\sqrt{\frac{d_{22}d_{33} - d_{23}^2}{d_{33}}} \varphi(x, y_0, t) - \frac{d_{12}\sqrt{d_{33}}}{\sqrt{d_{22}d_{33} - d_{23}^2}} \varphi(x, y, t) \right)^2 + \left(d_{11} - \frac{d_{12}^2 d_{33}}{d_{22}d_{33} - d_{23}^2} \right) \times \\ &\times \varphi^2(x, y, t) \geq \left(\frac{d_{11}d_{22}d_{33} - d_{11}d_{23}^2 - d_{12}^2 d_{33}}{d_{22}d_{33} - d_{23}^2} \right) \varphi^2(x, y, t) = \frac{\Delta_3}{d_{22}d_{33} - d_{23}^2} \varphi^2(x, y, t). \end{aligned}$$

Согласно (29) имеем

$$\Phi(t) \geq \frac{\Delta_3}{d_{22}d_{33} - d_{23}^2} \iint_J \varphi^2(x, y, t) dx dy. \quad (40)$$

Учитывая (14), (20), (40), получим неравенство

$$\begin{aligned} \iint_J \varphi^2(x, y, t) dx dy &\leq \frac{d_{22}d_{33} - d_{23}^2}{\Delta_3} \iint_J (\varphi_{t0}^2 + (a^2 - V^2) \varphi_{x0}^2 + a^2 \varphi_{y0}^2) dx dy + \\ &+ a^2 \int_b^c \varphi^2(x, y_0, 0) dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c \left(M w_0^2 + \left(D + \frac{|N| + \rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1} \right) w_0'^2 \right) dx, \end{aligned}$$

из которого следует теорема

Теорема 2. Пусть выполняются условия (13), (34), (38). Тогда решение $\varphi(x, y, t)$ системы уравнений (1)–(8) устойчиво в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных данных $\varphi_{t0}, \varphi_{x0}, \varphi_{y0}, \varphi(x, y_0, 0), \dot{w}_0, w_0''$.

3. Пример механической системы

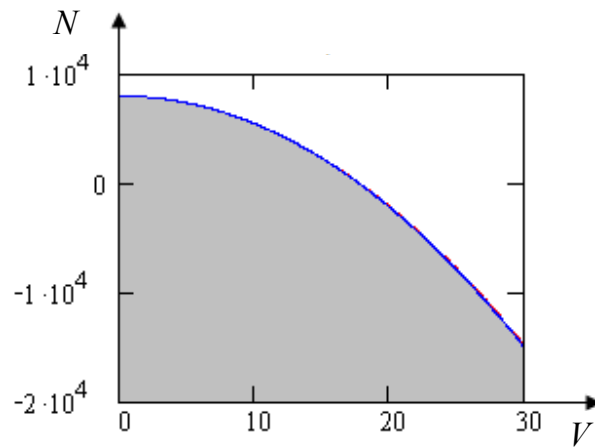
Рассмотрим пример механической системы. Рабочая среда – газ ($\rho = 1$), пластина изготовлена из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$, $\rho_{\text{пл}} = 8480$). Другие параметры механической системы: $a = 331$, $x_0 = 5$, $y_0 = 0,1$, $b = 2$, $c = 3$, $h = 0,005$, $\nu = 0,31$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 806,7$. Пусть концы упругой пластины

закреплены шарнирно, тогда $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{(c-b)^2} = \pi^2$. Все значения приведены в системе СИ.

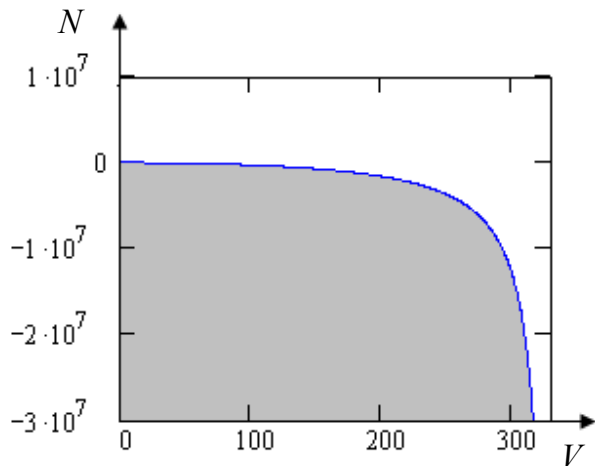
Запишем условие (33) в виде

$$N < \lambda_1 D - \frac{V^2 x_0^2 \rho y_0}{2(a^2 - V^2)\pi^2} \left(\frac{(a^2 - V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right). \quad (41)$$

Для неравенства (41) построены области устойчивости (серая область) на плоскости «усилие N – скорость потока V » (рис. 2).



а)



б)

Рис. 2. Область устойчивости на плоскости (N, V)

На рис. 2,а: $V \in [0, 30]$, на рис. 2,б: $V \in [0, a]$, где a – скорость звука. Из анализа неравенства (41), как видно на рис. 2,б, получено, что прямая $V = a$ является асимптотой границы области устойчивости.

Заключение

Получены достаточные условия динамической устойчивости упругого элемента стенки канала при протекании в нем дозвукового потока идеальной жидкости (газа). Условия накладывают ограничения на скорость однородного потока, сжимающего (растягивающего) элемент усилия, изгибную жесткость упругого элемента и другие параметры механической системы. Для конкретных примеров механических систем построены области устойчивости на плоскостях двух параметров, например, для параметров (N, V) .

Список литературы

1. Пат. 2062662 Российская Федерация, МПК6 В 06 В 1/18, 1/20. Гидродинамический излучатель / Вельмисов П. А., Горшков Г. М., Рябов Г. К. ; заявитель и патентообладатель Ульяновский гос. технич. ун-т. – № 5038746/28 ; заявл. 20.07.92 ; опубл. 27.06.96, Бюл. № 18.
2. **Коллатц, Л.** Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. – М. : Наука, 1968. – 503 с.

References

1. Pat. 2062662 Russian Federation, MPK6 V 06 V 1/18, 1/20. Hydrodynamic oscillator. Vel'misov P. A., Gorshkov G. M., Ryabov G. K.; applicant and patentee Ul'yanovsk State Technical University. No. 5038746/28; appl. 20 July 1992; opubl. 27 June 1996, bull. no. 18.
2. Kollatts L. *Zadachi na sobstvennye znacheniya* [Eigenvalue problems]. Moscow: Nauka, 1968, 503 p.

Анкилов Андрей Владимирович

кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, Ульяновский государственный технический университет (Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32)

E-mail: ankil@ulstu.ru

Ankilov Andrey Vladimirovich

Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of higher mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets street, Ulyanovsk, Russia)

Вельмисов Петр Александрович

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Ульяновский государственный технический университет (Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32)

E-mail: velmisov@ulstu.ru

Vel'misov Petr Aleksandrovich

Doctor of physical and mathematical sciences, head of sub-department of higher mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets street, Ulyanovsk, Russia)

Тамарова Юлия Александровна

инженер-программист, Ульяновское конструкторское бюро приборостроения (Россия, г. Ульяновск, ул. Крымова, 10А)

E-mail: kazakovau@mail.ru

Tamarova Yuliya Aleksandrovna

Engineer-programmer, Ulyanovsk design department of instrument engineering (10a Krymova street, Ulyanovsk, Russia)

УДК 533.6.013.42

Анкилов, А. В.

Динамическая устойчивость упругого элемента проточного канала /
А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 3 (31). – С. 40–55.